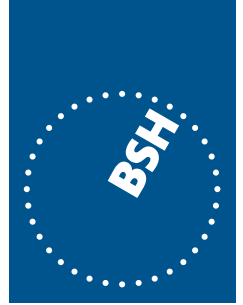


Gezeitenvorausberechnungen mit der Harmonischen Darstellung der Ungleichheiten

(On Tidal Predictions by Means of Harmonic Representation of Inequalities)



BUNDESAMT FÜR
SEESCHIFFFAHRT
UND
HYDROGRAPHIE

Gezeitenvorausberechnungen mit der Harmonischen Darstellung der Ungleichheiten

On Tidal Predictions by Means of Harmonic Representation of Inequalities

Sylvin H. Müller-Navarra

Berichte des Bundesamtes für
Seeschifffahrt und Hydrographie
Nr. 50/2013

In der Reihe „Berichte des Bundesamtes für Seeschifffahrt und Hydrographie“ werden Themen mit Dokumentationscharakter aus allen Bereichen des BSH veröffentlicht. Durch die Publikation nimmt das BSH zu den Inhalten der Beiträge keine Stellung. Die Veröffentlichungen in dieser Berichtsreihe erscheinen nach Bedarf.

„Gezeitenvorausberechnungen mit der Harmonischen Darstellung der Ungleichheiten“ im Internet:
www.bsh.de (Menü: Produkte → Bücher → Berichte des BSH)

© Bundesamt für Seeschifffahrt und Hydrographie (BSH)
Hamburg und Rostock 2013
www.bsh.de

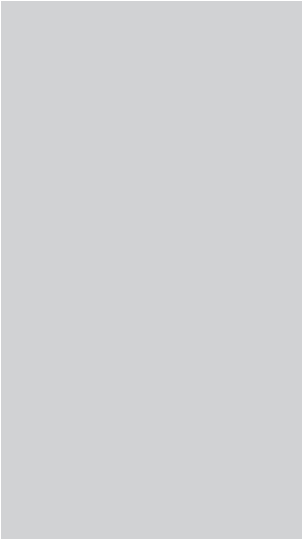
ISSN-Nr. 0946-6010

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieses Werkes darf ohne ausdrückliche schriftliche Genehmigung des BSH reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	5
1 Einleitung	7
2 Astronomische Grundlagen	9
3 Harmonische Darstellung der Ungleichheiten (HDdU)	11
4 Rechengang	13
a) Berechnung der Durchgangszeiten des wahren Mondes durch den Nullmeridian in oberer und unterer Kulmination	15
b) Synchronisation des mittleren Mondes mit den Transitzeiten des wahren Mondes	16
c) Aufbereitung 19-jähriger Pegelbeobachtungen	17
d) Filterung der Daten	17
e) Festlegung der relevanten Winkelgeschwindigkeiten	18
f) 8 bzw. 96 Ausgleichungen zur Berechnung der Koeffizientensätze für die Ungleichheiten	19
g) Synthese	20
5 Ausblick	21
Literaturverzeichnis	23
Anhang	25
Formelzeichen	29

Zusammenfassung



Gewässer mit Verbindung zum offenen Meer zeigen Wasserspiegelschwankungen mit deutlichen Gezeitenanteilen. Bei der Interpretation derartiger Wasserstandszeitreihen kommt es darauf an, den astronomisch bedingten Anteil sachgerecht herauszulösen. Erst dann sind gesicherte Aussagen zu meteorologischen, klimatologischen und hydrologischen Einflüssen oder gar Trends möglich. Eine Gezeitenanalyse ermöglicht nicht zuletzt auch die Gezeitenvorausberechnungen, die in der Form von Gezeitentafeln und zunehmend auch digital z. B. der Schifffahrt und der Wasserwirtschaft an der Küste dienen. Seit 1954 werden die Höhen und Zeiten der Hoch- und Niedrigwasser mit dem Verfahren „Harmonische Darstellung der Ungleichheiten“ berechnet. Der Rechengang wird am Beispiel einer 19-jährigen Zeitreihe des Pegels Cuxhaven im Detail erläutert und ebenso die Erweiterung der Anwendung des Verfahrens auf vollständige Gezeitenkurven.

Schlagwörter: Gezeitenvorausberechnung, Gezeitenkurve, Ungleichheiten

1 Einleitung

Für die deutschen Küstengewässer stehen umfangreiche Pegelzeitreihen in guter Qualität zur Verfügung, seit Mitte der 1990er Jahre auch im Minutentakt. Im Zuge umfangreicher Forschungsprojekte zu globalen Klimaschwankungen ist auch die Entwicklung des relativen Meeresspiegels an einigen deutschen Pegelstationen näher untersucht worden (Wahl et al., 2011).

Motivation für diesen Aufsatz ist einerseits die öffentliche Dokumentation des BSH-Verfahrens zur Gezeitenanalyse, mehr aber noch, dass bald (ca. Ende 2014) minutengetaktete digitale Pegeldaten über 19 Jahre aufgesammelt und verfügbar sein werden. Eine vielfältigere operationelle Nutzung des kontinuierlichen Datenflusses wird in der Praxis gefordert, ohne sachgerechte Behandlung des Gezeitenanteils hierbei geht es aber nicht. Jüngst ist ein Bericht der technisch-wissenschaftlichen Vereinigung des Hafen- und Wasserstraßenbaus und der Schifffahrt (PIANC) erschienen, der die zukünftige Bedeutung von operationellen Datendiensten für die Erreichbarkeit von Seehäfen hervorhebt (PIANC, 2012). Gezeitenanalysen und -vorausberechnungen haben eine lange Tradition (Cartwright, 1999). Praktische Bedeutung, vornehmlich zur Produktion von Gezeitentafeln, haben bisher drei verschiedene Verfahren erlangt:

- das Nonharmonische Verfahren,
- das Harmonische Verfahren und
- die Harmonische Darstellung der Ungleichheiten.

Das Nonharmonische Verfahren zur Berechnung der Gezeiten (von halbtägiger Form) ist ein Verfahren, bei dem man die Hoch- und Niedrigwasserzeiten eines Ortes erhält, indem man zu den Meridiandurchgangszeiten des Mondes die mittleren Hoch- und Niedrigwasserintervalle sowie die Ungleichheiten in Hoch- und Niedrigwasserzeit hinzufügt, und die Hoch- und Niedrigwasserhöhen, indem man zu den mittleren Hoch- und Niedrigwasserhöhen die Ungleichheiten in Hoch- und Niedrigwasserhöhe addiert. Die vier Ungleichheiten in Zeit und Höhe werden ihrerseits aus je einer halbmonatlichen, parallaktischen, Deklinations- und täglichen Ungleichheit sowie gegebenenfalls auch noch aus weiteren Verbesserungen zusammengesetzt.

Die harmonische Analyse der Gezeiten (z. B. Pansch, 1988, mit weiteren Quellenangaben) beruht auf einer gleichartigen Zerlegung der gezeitenerzeugenden Kräfte in harmonische Glieder (Hartmann und Wenzel, 1995). Die Winkel der einzelnen harmonischen Tiden, auch Partialtiden genannt, nehmen gleichmäßig mit der Uhrzeit am Ort zu. Die verschiedenen Perioden der einzelnen Tiden ergeben sich aus der Lehre von den Bewegungen des Mondes und der Sonne; sie sind für alle Orte der Erde die gleichen. Die Amplituden und die Phasen der Partialtiden sind dagegen im allgemeinen von Ort zu Ort verschieden und kennzeichnen den verschiedenartigen Verlauf der Gezeiten an den einzelnen Orten.

Die Harmonische Darstellung der Ungleichheiten (Horn, 1960) ist ein Verfahren zur Berechnung der Gezeiten, das dem Nonharmonischen Verfahren ähnelt, bei dem jedoch die Ungleichheiten der Hoch- und Niedrigwasser in Zeit und Höhe ähnlich wie beim Harmonischen Verfahren durch Zusammensetzen aus periodischen Gliedern berechnet werden.

Leider bedienen sich viele Meereswissenschaftler fertiger Programmmodule des Harmonischen Verfahrens (z. B. Pawlowicza et al., 2002) zur Erstellung von Gezeitenanalysen und -synthesen, ohne die damit verbundenen Einschränkungen zu kennen. Vielfach werden auch zur Benutzung von Synthese-Programmmodulen „Gezeitenkonstanten“ der deutschen Küstenpegel nachgefragt, obgleich die Gezeitenverhältnisse dort keineswegs konstant sind. Das BSH sieht seit 1966 von der Veröffentlichung derartiger „Konstanten“ ab. Ausländische hydrographische Dienste geben solche Informationen noch heraus, weil meist die örtlichen Gezeitenverhältnisse nicht derart verwickelt sind wie an den deutschen Flachküsten.

2 Astronomische Grundlagen

Der zeitliche Gang der Meeresgezeiten wird schon seit alters her mit den Stellungen von Mond und Sonne relativ zur Erde verbunden. Charakteristisch für die Nordseegezeiten ist, dass jeder oberen Kulmination des Mondes ein Hochwasser und das darauf folgende Niedrigwasser zugeordnet werden kann. Im Mittel 12 h 25 min später, nach der unteren Kulmination, folgt wieder ein Hochwasser und anschließend ein Niedrigwasser. Die Zeit, die im Mittel vom Durchgang des Mondes durch den Nullmeridian in oberer Kulmination (oder durch 180° W in unterer Kulmination) und der Eintrittszeit des nächstfolgenden Hochwassers verstreicht, wird mittleres Hochwasserintervall (MHWI) genannt. In der Deutschen Bucht treten Intervalle zwischen 9 h 45 min (Borkum) und 16 h 27 min (Geesthacht) auf, in Cuxhaven werden 11 h 50 min beobachtet (vergl. Tab. 3). Anders als in weiten Teilen des Weltozeans mit seinen Rand- und Nebenmeeren sind die Nordseegezeiten insbesondere in der Deutschen Bucht sehr regelmäßig, sie sind ganz überwiegend halbtägiger Art mit Tidenhuben von 2 bis 4 m. Die astronomisch erklärbaren Abweichungen der Hoch- und Niedrigwasserintervalle von ihren Mittelwerten betragen weniger als 1 h. Die entsprechenden Höhenabweichungen schwanken im Betrage um weniger als 0,5 m. Weil dies so ist, sind zeitliche Mittelwerte der Höhen und Intervalle bereits gute Näherungen für den Einzelfall.

Auf eine ausführliche Darstellung der himmelsmechanischen Grundlagen der Gezeitentheorie wird hier verzichtet. Empfehlenswerte Darstellungen der Gezeiten als Funktion der Zeit hat bereits Horn (1948 und 1960) vorgelegt.

3 Harmonische Darstellung der Ungleichheiten (HDdU)

Die Harmonische Darstellung der Ungleichheiten greift die Idee des Nonharmonischen Verfahrens auf, mit dem seit langer Zeit auf der Basis von Mondbeobachtungen brauchbare Gezeitenvorausberechnungen für Hoch- und Niedrigwasserhöhen und -zeiten erstellt wurden (Lubbock, 1831). Das Nonharmonische Verfahren ist gegen Ende des 19. Jahrhunderts fast gänzlich durch das Harmonische Verfahren verdrängt worden, da damit die Berechnung vollständiger Kurven möglich wurde (ausführliche Quellenangaben bei Cartwright (1999)). Auch die deutschen Gezeitentafeln sind bis 1953 teilweise damit berechnet worden, es stellte sich aber heraus, dass trotz des enormen Aufwandes die Resultate unbefriedigend blieben (Pansch, 1989). Weil die Schifffahrt mit der Vorhersage der Scheitelpunkte (HW, NW) zufrieden war, hat Horn (1948) ein ökonomischeres Verfahren vorgeschlagen und in die Praxis eingeführt (Horn, 1960), mit dem seit 1954 die deutschen Gezeitentafeln produziert werden.

Da bisher eine im Detail nachvollziehbare Dokumentation der seit 1953 am BSH praktizierten Methode „Harmonische Darstellung der Ungleichheiten“ nicht vorliegt, soll das hier nachgeholt werden. Zunächst führe ich für den sperrigen Methodennamen das Akronym HDdU ein. Im Methodennamen steckt bereits die wichtige Information, dass es hierbei nicht um die Berechnung des Gesamtsignals Wasserstand geht, sondern nur um die mathematische Beschreibung der Abweichungen von wie auch immer gearteten Mittelwerten. Das Wort Ungleichheiten ist ein schon lange in der Himmelsmechanik gebräuchlicher Begriff, er weist auf deutliche Störungen einer nur auf den ersten Blick gleichförmigen Mondbewegung hin, die schon im Altertum bekannt waren (Smits, 1910).

4 Rechengang

HDdU ist sowohl zur Berechnung der Scheitelpunkte (HWZ, HWH, NWZ, NWH) als auch für Gezeitenganglinien anwendbar. Im ersten Falle sind 8 Ausgleichungen erforderlich, da zwischen Durchgängen durch den Nullmeridian in der oberen Kulmination und durch 180° westlicher Länge (untere Kulmination) unterschieden wird. Bei den Ganglinien bestimmt sich die Anzahl der Stützstellen nach dem Zeitschritt. Wählt man z. B. einen Zeitschritt von 15 Mondminuten (=15,5257515 min), dann sind 96 Ausgleichungen nötig. Ein größerer Zeitschritt erscheint bei den recht großen Steiggeschwindigkeiten einiger Gezeitenflusspegel bei beginnendem Flutstrom nicht sinnvoll zu sein, ein kleinerer bei ausreichenden Rechnerkapazitäten sehr wohl.

Synthesen der Scheitelpunktzeiten und ganz analog der -höhen (Tab. 1) erfolgen nach Gleichung (1). Die Synthese hinsichtlich der Eintrittszeiten der einzelnen HW und NW ergibt den Zeitabstand zu den jeweiligen vorangegangenen mittleren Transits t_i (s. unten).

$$w_{k,l,i} = c_{k,l,0} + \sum_{j=1}^{\hat{n}} (c_{k,l,j=2\hat{j}-1} \cos \omega_j \cdot i + c_{k,l,j=2\hat{j}} \sin \omega_j \cdot i); \quad k = 1, \dots, 4; l = 1, 2 \quad (1)$$

mit $i = N_{\text{Anfang}}, \dots, N_{\text{Ende}}$.

Tabelle 1: Ungleichheiten in Zeit ($l=1$) und Höhe ($l=2$). ($k=1,2$: obere Kulmination, $k=3,4$: untere Kulmination)

Ungleichheiten		
	$l=1$	$l=2$
$k=1$	$w_{1,1,i} = \text{HWZ}_i - t_i$	$w_{1,2,i} = \text{HWH}_i$
$k=2$	$w_{2,1,i} = \text{NWZ}_i - t_i$	$w_{2,2,i} = \text{NWH}_i$
$k=3$	$w_{3,1,i} = \text{HWZ}_i - t_i$	$w_{3,2,i} = \text{HWH}_i$
$k=4$	$w_{4,1,i} = \text{NWZ}_i - t_i$	$w_{4,2,i} = \text{NWH}_i$

Tabelle 2: Bedeutung der konstanten Anteile aus (1). ($k=1,2$: obere Kulmination, $k=3,4$: untere Kulmination)

Bedeutung		
	$l=1$	$l=2$
$k=1$	$c_{1,1,0} = \text{MHWI}$	$c_{1,2,0} = \text{MHW}$
$k=2$	$c_{2,1,0} = \text{MNWI}$	$c_{2,2,0} = \text{MNW}$
$k=3$	$c_{3,1,0} = \text{MHWI}$	$c_{3,2,0} = \text{MHW}$
$k=4$	$c_{4,1,0} = \text{MNWI}$	$c_{4,2,0} = \text{MNW}$

Im Falle der Berechnung von Ganglinien sind die Zeiten in einem festen Raster mit 96 Stützstellen definiert. Den Index $k=1$ erhält willkürlich ein Zeitpunkt $1/8$ Mondstunde nach Transit in oberer Kulmination zuzüglich des MHWI; dieser Zeitpunkt liegt also ungefähr 7,8 min nach dem zugeordneten Hochwasser (Abb. 1). Die weiteren Zeitpunkte 2 bis 96 folgen jeweils im Abstand von $1/4$ Mondstunden.

$$w_{k,i} = c_{k,0} + \sum_{j=1}^{\hat{n}} (c_{k,j=2j-1} \cos \omega_j \cdot i + c_{k,j=2j} \sin \omega_j \cdot i); \quad k = 1, \dots, 96 \quad (2)$$

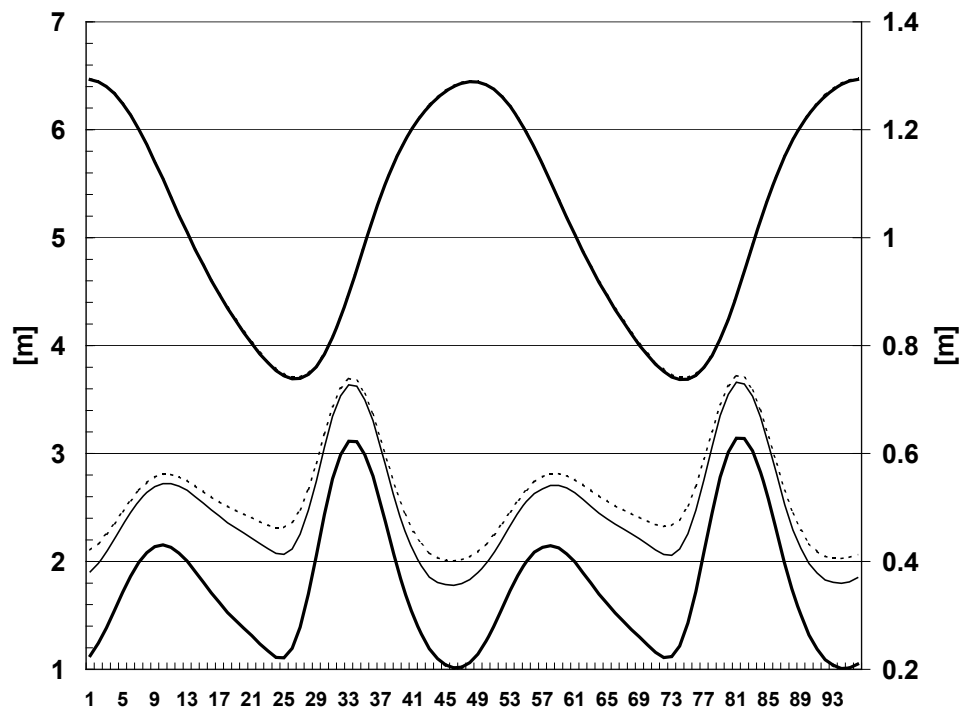


Abb. 1: Mittelwerte (oben, linke Ordinate [m über PNJ]) und Standardabweichung (unten, rechte Ordinate, [m]) der vollständigen Daten (gestrichelt), der 3-SD-gefilterten Daten (dünne Linie) und der Gezeiten synthese (dicke Linie), festes Zeitraster mit 96 Stützstellen.

Da die relevanten Winkelgeschwindigkeiten ω_j mit Bedacht aus den Bestandteilen des gezeiterzeugenden Potential (Hartmann und Wenzel, 1995) ausgewählt werden können, geht es im wesentlichen um die Bestimmung der Koeffizienten $c_{k,l,j}$ (1) bzw. $c_{k,j}$ (2). Diese mit einigen Kniffen verbundene Koeffizientenberechnung wird Gezeitenanalyse genannt, die einfache Anwendung von Gleichung (1) bzw. (2) heißt Gezeiten synthese.

Bei konsequenter Anwendung des Ordnungsmerkmals Mondtransit ist die Gezeitenanalyse leicht zu bewerkstelligen. Das wird besonders deutlich durch die Argumente der Winkelfunktionen in (1) bzw. (2) $\omega_j \cdot i$. Die in $^\circ/\text{Mondtag}$ geführte Winkelgeschwindigkeit nimmt Werte zwischen 0 und $100^\circ/\text{Mondtag}$

an (Tab. 5); i zählt die Transits des Mondes, und es ist nur darauf zu achten, dass bei Analyse und Synthese dieser Zähler den gleichen Nullpunkt hat. In den folgenden Abschnitten wird der Leser nun in die Lage versetzt, bei Bedarf ein eigenes Computerprogramm der Gezeitenanalyse und Synthese zu entwickeln. Das Problem lässt sich grob in 7 Schritte a) bis g) gliedern:

- a) Berechnung der Durchgangszeiten des wahren Mondes durch den Nullmeridian in oberer und unterer Kulmination,
- b) Synchronisation des mittleren Mondes mit den Transitzeiten des wahren Mondes,
- c) Aufbereitung 19-jähriger Pegelbeobachtungen,
- d) Filterung der Daten (3-fache Standardabweichung),
- e) Festlegung der relevanten Winkelgeschwindigkeiten,
- f) 8 bzw. 96 Ausgleichungen zur Berechnung der Koeffizientensätze und
- g) Synthese.

a) Berechnung der Durchgangszeiten des wahren Mondes durch den Nullmeridian in oberer und unterer Kulmination

Hier soll als Transitzeit der Zeitpunkt des Durchganges des Mondes (Massenschwerpunkt) durch den Nullmeridian (Sternwarte Greenwich) definiert sein. Ein minutengenaues Verfahren lässt sich aus den Angaben in den Kapiteln 7, 10, 13, 22, 47 bei Meeus (1998) programmieren. Alternativ kann man sich durch Beschaffung von Tabellen astronomischer Dienste behelfen. Eine sehr hohe Genauigkeit der Transitberechnungen ist wegen der Unsicherheit der Pegelbeobachtungen (siehe c)) nicht nötig.

b) Synchronisation des mittleren Mondes mit den Transitzeiten des wahren Mondes

Unsere Erfahrungen im zeitlichen Ablauf der Naturerscheinungen und Dinge orientieren sich im groben Rahmen der Zeitzonen am Transit der Sonne durch den Ortsmeridian. Empfindlich gestört werden zeitliche Zuordnungen von Naturerscheinungen durch das Umschalten zwischen Sommer- und Winterzeit auf gesetzlicher Grundlage. Es wird dringend empfohlen, während des gesamten Rechenganges a) bis g) in UTC zu rechnen und die Daten erst für die Erstellung von lokalen Produkten in gesetzliche Zeiten umzurechnen.

Der mittlere Mond ist definiert als ein fiktives Gestirn, das auf der Äquatorebene die Erde umkreist. Seine Durchgänge durch den oberen und unteren Meridian des Ortes geschehen in einem zeitlichen Abstand von $360^\circ / (28,9841042^\circ/\text{h}) = 12,4206012 \text{ h}$ [Anmerkung: in Müller-Navarra (2009), S. 386 u., ist diese Zahlenangabe ab Nachkommastelle 6 falsch.]. Diese Zeit, geteilt durch 12, ergibt eine Mondstunde von 1,0350501 h. Zur Berechnung von Vielfachen dieser Mondstunde zur Definition des Zeitrasters, welches im Folgenden über die Wasserstandszeitreihen gelegt wird, sind die genannten 7 Nachkommastellen voll ausreichend.

Es ist zweckmässig, die Mondtransits zu nummerieren und diese Nummern auch den folgenden vier Scheitelpunkten zu geben. Der Transit des wahren Mondes durch den Nullmeridian in oberer Kulmination am 31.12.1949 um 21:08 UTC (T_0) erhält die Nummer Null (Müller-Navarra, 2009). Die zeitlich davor liegenden Transits erhalten negative Nummern, danach eintretende Transits positive. Beispielsweise ist der Durchgang am 4. Sept. 2006 der 20000ste. Zuletzt muss noch das Zeitraster der mittleren Mondes auf der Zeitachse fixiert werden, damit Hoch- und Niedrigwasserintervalle (Tab. 2) unmittelbar durch die Koeffizienten $c_{k,1,0}$; $k = 1, \dots, 4$ dargestellt werden können. Hierzu wird zunächst das Raster des mittleren Mondes so gesetzt, dass $\hat{t}_0 = T_0$. Vergleicht man nun die wahren mit den so fixierten „mittleren“ Transits, weisen erstere erhebliche Ungleichheiten auf, die z. T. schon im Altertum bekannt waren. Diese astronomischen Ungleichheiten mit einer Standardabweichung von ca. 21 min finden sich in den natürlichen, meteorologisch gestörten Gezeitenwasserständen als größere Ungleichheiten in Zeit wieder. Der Mittelwert $T - \hat{t}$ beträgt für den Zeitraum 01.01.1801–30.12.2049 etwa +24,23 min und um eben diesen Wert wird abschließend das Zeitraster des mittleren Mondes verschoben, so dass $t = \hat{t} + T - \hat{t}$. Alle Zeiten t , \hat{t} und T werden verfahrensintern als Tagzahl gerechnet (Müller-Navarra, 2009). Aus diesen Tagzahlen lassen sich dann in einfacher Weise zeitliche Differenzen mit den Eintrittszeiten der Scheitel bilden, z. B. Hochwasser- oder Niedrigwasserintervalle (Tab. 6, Spalte 6).

c) Aufbereitung 19-jähriger Pegelbeobachtungen

Die astronomischen Grundlagen der Gezeitentheorie sind hinreichend beschrieben (Horn, 1948). Daraus ergibt sich u. a. die Forderung, jeweils Zeitspannen von mindestens 19 Jahren gleichzeitig zu analysieren. Tab. 6 im Anhang zeigt den Anfang (31.12.1990, 23:45 UTC) bzw. das Ende (31.12.2009, 18:15 UTC) des Zeitraumes mit Scheitelpunktbeobachtungen am Pegel Cuxhaven, Transitzeiten des Mondes und Synthesen.

Die beobachteten Scheitelpunktzeiten und -höhen (Tab. 6, Spalten 5 und 7) müssen zuerst den Mondtransits zugeordnet werden (Sp. 1 u. 2). Hierfür lässt sich bei ruhigen Wetterlagen eine eindeutige Abbildung finden (Müller-Navarra, 2009). Bei starken Stürmen, wenn die Eintrittszeiten mehrere Stunden von den HWZ bzw. NWZ abweichen, muss nachgebessert werden. Aber auch das kann weitgehend automatisiert erfolgen. Der den Analysen zugrunde liegende Datensatz des Pegels Cuxhaven reicht vom Hochwasser nach unterer Kulmination ($i=14467$, $k=3$) bis zum Niedrigwasser nach oberer Kulmination ($i=21172$, $k=2$).

Im Falle der Gangliniendarstellung werden für den gleichen Zeitraum jedem Transit bei oberer Kulmination 96 nachfolgende Stützstellen zugeordnet (s. o.).

d) Filterung der Daten

Da der an den Küstenpegeln gemessene Wasserstand sehr windanfällig ist, können gehäuft auftretende stürmische Jahre mit vielen Sturmfluten oder lang anhaltenden erniedrigten Wasserständen die Vorausberechnungen „verderben“, insbesondere, was die langperiodischen Glieder angeht. Es hat sich eine Filterung der 19-jährigen Zeitreihen bewährt, bei der alle Einzelfälle ausgeschlossen werden, die um mehr als die 3fache Standardabweichung vom Mittelwert abweichen. Tab. 3 zeigt Mittelwerte und Standardabweichungen für die Beobachtung, den gefilterten Datensatz und die Scheitelwertvorausberechnung. Durch die Filterung fallen bei den Eintrittszeiten gerade einmal 0,1 % der Daten fort, bei den Höhen sind es etwa 1,5 % der Beobachtungen.

Im Falle der Bearbeitung für Ganglinien sind Mittelwerte und Standardabweichung (SD) graphisch dargestellt (Abb. 1). Hier liegen die Fallzahlen m im Mittel bei 6623 bzw. nach Filterung bei 6563 von 6689 möglichen. Auffällig ist, dass ca. 2 h nach NWZ die größten Standardabweichungen auftreten. Genau hier liegt das Hauptproblem der Ganglinienvorhersage in Tideflüssen. Je weiter stromauf der Pegel gelegen ist, desto mehr verkürzen sich die Flutdauern und desto rasanter vollzieht sich der Anstieg des Wasserstandes. Im Extremfall kann es, manchmal auch nur zur Springzeit, zu borenartigen Erscheinungen kommen, bei denen die Flutdauer gegen Null geht.

Tabelle 3: Mittelwerte und Standardabweichung der Ungleichheiten in Höhe und Zeit (Zeitraum: 1991–2009; $i=14467$ bis 21172; $m \leq 6706$)

k	l	Beobachtungen			gefilterte Daten			Synthese		
		m	Mittelwert	SD	m	Mittelwert	SD	m	Mittelwert	SD
1	1	6704	11:50 h:min	40,62 min	6697	11:50 h:min	40,30 min	6706	11:50 h:min	38,85 min
1	2	6704	6,54 mPN	0,41 m	6609	6,53 mPN	0,36 m	6706	6,54 mPN	0,19 m
2	1	6704	18:40 h:min	44,27 min	6694	18:40 h:min	43,78 min	6706	18:40 h:min	42,76 min
2	2	6704	3,58 mPN	0,45 m	6601	3,55 mPN	0,39 m	6706	3,56 mPN	0,20 m
3	1	6703	24:14 h:min	40,89 min	6696	24:14 h:min	40,67 min	6706	24:14 h:min	39,31 min
3	2	6703	6,52 mPN	0,41 m	6597	6,51 mPN	0,36 m	6706	6,51 mPN	0,19 m
4	1	6705	31:05 h:min	45,00 min	6696	31:05 h:min	44,69 min	6706	31:05 h:min	43,42 min
4	2	6705	3,57 mPN	0,45 m	6602	3,55 mPN	0,39 m	6706	3,55 mPN	0,20 m

e) Festlegung der relevanten Winkelgeschwindigkeiten

Die in Frage kommenden Winkelgeschwindigkeiten ω_j sind ganzzahlige Linearkombinationen

$$\omega_j = \alpha s + \beta h + \gamma p + \delta N' \quad (3)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ (Bedeutung und Werte der Multiplikatoren s. Tab. 4). Wahl und Anzahl der ω_j in Tab. 5 lässt noch Raum für Modifikationen. Im langperiodischen Bereich (No. 1–6) beschränkt sich Horn (1960) auf No. 1, 4, 5 und 6.

Dass für die Darstellung der Ungleichheiten in Höhe und Zeit lediglich vier Grundperioden hinreichen, während es bei der exakten Beschreibung des gezeiterzeugenden Potentials von Mond und Sonne sechs sein müssen, mag überraschen. Die Begründung gibt Horn (1948), wobei hier noch hinzukommt, dass die Umlaufzeit des Perihels von ca. 20940 Jahren unberücksichtigt bleiben kann.

Tabelle 4: Zahlenwerte für die vier Variablen in den Koordinaten von Mond und Sonne in °/Mondtag und zugehörige Perioden (vergl. Tab. 5)

Bezeichnung	[°/Mondtag]	Periode [a]
s	13,638230516	27,321583 Tage = tropischer Monat
h	1,020194382	365,242196 Tage = tropisches Jahr
p	0,115308512	8,84752 Jahre = Umlaufzeit des mittleren Perigäums
N'	0,054809904	18,6133 Jahre = Umlaufzeit des mittleren Knotens

f) 8 bzw. 96 Ausgleichungen zur Berechnung der Koeffizientensätze für die Ungleichheiten

Die Koeffizienten $c_{k,l,j}$ in Gleichung (1) mit $j = 0 \dots 2\hat{n}$ – bei jeweils festgehaltenen k und l – werden anhand einer ausreichenden Zahl von (gefilterten) Beobachtungen durch $k \cdot l = 8$ Ausgleichungen so bestimmt, dass

$$\| \mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{b} \|_2 \xrightarrow{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n} \text{Minimum!} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \text{ mit } m \geq n. \quad (4)$$

Im Falle von $l=1$ besteht der Vektor \mathbf{b} aus beobachteten Zeitdifferenzen $HWI = HWZ_i^{beob} - t_i$ oder $NWI = NWZ_i^{beob} - t_i$ und im Falle $l=2$ aus beobachteten HWH oder NWH. Wegen der Filterung ist $m \leq N_{Ende} - N_{Anfang} + 1$. Gesucht ist also eine Lösung $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ des linearen Quadratmittelproblems (4) und damit ein Vektor \mathbf{c} , der das Residuum $\mathbf{r}(\mathbf{c}) := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{c}$ des überbestimmten Systems in der Euklidischen Norm minimiert. Benutzt wurde zur Berechnung des Vektors \mathbf{c} ein Verfahren mit Singulärwertzerlegung nach Golub und Reinsch (1970).

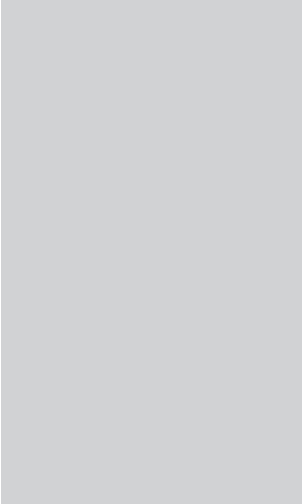
Im Fall 2 mit $k=96$ Ausgleichungen zur Berechnung der Koeffizienten $c_{k,j}$ der Ganmlinie (Gezeitenkurve) wird völlig analog zum Fall 1 vorgegangen, mit dem Unterschied, dass die Zeitpunkte im festen Mondviertelstundenabstand bereits gesetzt sind.

g) Synthese

Die Synthese geschieht nach Gleichungen (1) bzw. (2). Es bleibt noch die Frage offen, für welche Vorher- und Nachhersagezeiträume die Koeffizienten gültig sind. Es ist ja nicht so, dass es sich bei diesen Koeffizienten um „Konstanten“ handelt. Auch Gezeiten sind natürliche Vorgänge und unterliegen einem steten, wenn auch kleinen Wandel. Besonders bei Pegelzeitreihen von Gezeitenflüssen ist zu empfehlen, die Synthesen auf der Grundlage von Analysen der unmittelbar vorangehenden 19 Jahre zu erledigen, jeweils soweit sie schon verfügbar sind. Möchte man für einen längeren Zeitraum von Beobachtungen nachträglich Synthesen berechnen, kann man 19 Jahre übergreifend Koeffizienten bestimmen und jeweils nur das zentrale Jahr damit erstellen. Die Synthesen für die ersten und letzten neun Jahre werden dann mit einem unveränderten Koeffizientensatz berechnet.

Bei der Erstellung von Gezeitentafeln für Gezeitenflüsse insbesondere in den Jahren nach Fahrrinnenanpassungen hat es sich bewährt, besondere konstante Glieder (Tab. 2) aus z. B. vorangegangenen Jahren zu gewinnen und in der Synthese (1) und (2) die langperiodischen Anteile mit \hat{j}_1 und \hat{j}_2 (Tab. 5) unberücksichtigt zu lassen. Derlei Optimierungen des hier vorgestellten Verfahrens bieten noch Raum für weitere Entwicklungsarbeit.

5 Ausblick



Das hier vorgestellte Verfahren erlaubt, lange Zeitreihen von (unvollständigen) Hoch- und Niedrigwasserbeobachtungen sowie Ganglinien zu analysieren. Nachträgliches Bestimmen und Entfernen der Gezeitenanteile aus solchen Zeitreihen ermöglicht z. B. die Nutzung der Residuen, Windstau genannt, als Stellvertreter (Proxy) für den regionalen Wind. Gegenstand der Klimaforschung ist u. a. die Abschätzung zukünftiger Wetterextreme, zu denen auch Stürme und langanhaltende Wetterlagen gehören. Im Grunde ist der örtliche Windstau in der Rückschau besser zu ermitteln als der Wind, für den in der Regel oft nur inhomogene Datensätze vorliegen. Mit dem Windstau lässt sich z. B. untersuchen, ob sich in der Deutschen Bucht die Häufigkeit auflandiger Winde ($295^\circ \pm 90^\circ$) im Verhältnis zur Häufigkeit ablandiger Winde ($105^\circ \pm 90^\circ$) verändert hat. Eine entsprechende Studie zum Windstau und zum relativen Meeresspiegelanstieg am Pegel Cuxhaven entsteht zur Zeit in Zusammenarbeit mit der Universität Siegen und dem Deutschen Wetterdienst.

Literaturverzeichnis

- Cartwright, D. E. (1999) *Tides: a scientific history*. Cambridge University Press. 292 S.
- Golub, G.H., C. Reinsch (1970) Singular Value Decomposition and Least Square Solutions. *Numer. Math.* 14, 403–420
- Hartmann, T., H.-G. Wenzel (1995) Catalogue HW95 of the tide generating potential. *Bull. Inf. Marées Terrestres* 123, 9278–9301
- Horn, W. (1948) Über die Darstellung der Gezeiten als Funktion der Zeit. *Dt. hydrogr. Z.* 1, 124–140
- Horn, W. (1960) Some Recent Approaches to Tidal Problems. *Int. Hydrogr. Rev.* 37(2), 65–84
- Lubbock, J. W. (1831) On the Tides of the Port of London. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 121, 379–415
- Meeus, J. (1998) *Astronomical Algorithms*. Second Edition. Willmann-Bell, Inc. 477 pp.
- Müller-Navarra, S. H. (2009) Zur automatischen Scheitelpunktbestimmung gemessener Tidekurven in der Deutschen Bucht. *Hydrologie und Wasserbewirtschaftung* 53, 380–388
- Müller-Navarra, S.H., H. Giese (1999) Improvements of an Empirical Model to Forecast Wind Surge in the German Bight. *Dt. hydrogr. Z.* 51, 385–405
- Müller-Navarra, S. H., K. Knüpfer (2010) Improvement of water level forecasts for tidal harbours by means of model output statistics (MOS) – Part I (Skew surge forecast). *Berichte des Bundesamtes für Seeschifffahrt und Hydrographie* 47. 22 pp.
- Pansch, E. (1988) Harmonische Analyse von Gezeiten- und Gezeitenstrombeobachtungen im Deutschen Hydrographischen Institut, Hamburg. Deutsches Hydrographisches Institut, Nr. 2350, *Wissenschaftlich-Technische Berichte* 1988-1. Hamburg. 32 S.
- Pansch, E. (1989) New Harmonic Tidal Constants for some German North Sea Stations. *Dt. Hydrogr. Z.* 42, 27–39
- PIANC report no. 117 (2012) *Use of hydro/meteo information for port access and operation*. Brussels. 93 S.
- Pawlowicza, R., B. Beardsley, S. Lentz (2002) Classical tidal harmonic analysis including error estimates in MATLAB using T_TIDE. *Computers & Geosciences* 28, 929–937
- Smits, P. J. (1910) Uit des geschiedenis van de ontwikkeling der getijtheorie. *De Zee* 32, 633–653
- Wahl, T., J. Jensen, T. Frank, I. D. Haigh (2011): Improved estimates of mean sea level changes in the German Bight over the last 166 years. *Ocean Dynamics* 61, 701–715

Anhang

Tabelle 5: Argumentzahlen und Winkelgeschwindigkeiten ω_j [modifiziert und ergänzt nach Horn (1960)]. No. 1, 2, 4 und 12 hervorgehoben [vergl. Tab. 4].

\hat{j}	s	h	p	N'	°/Montag
0	0	0	0	0	0,000000000
1	0	0	0	1	0,054809904
2	0	0	1	0	0,115308512
3	0	1	-1	0	0,904885870
4	0	1	0	0	1,020194382
5	0	2	-2	0	1,809771741
6	0	2	0	0	2,040388764
7	1	-2	0	0	11,597841752
8	1	-2	1	0	11,713150263
9	1	0	-1	-1	13,468112100
10	1	0	-1	0	13,522922004
11	1	0	0	-1	13,583420612
12	1	0	0	0	13,638230516
13	1	0	0	1	13,693040419
14	1	2	-1	0	15,563310768
15	2	-4	2	0	23,426300526
16	2	-3	0	0	24,215877885
17	2	-2	0	-1	25,181262364
18	2	-2	0	0	25,236072267
19	2	-2	0	1	25,290882171
20	2	-2	1	0	25,351380779
21	2	0	-2	0	27,045844008
22	2	0	-1	0	27,161152519
23	2	0	0	-1	27,221651128
24	2	0	0	0	27,276461031
25	2	0	0	1	27,331270935
26	3	-4	1	0	36,949222530
27	3	-3	-1	0	37,738799889
28	3	-2	-1	-1	38,704184367
29	3	-2	-1	0	38,758994271
30	3	-2	-1	1	38,813804174
31	3	-2	0	0	38,874302783
32	3	-2	1	0	38,989611294
33	3	0	-1	0	40,799383035
34	4	-5	0	0	49,451950152
35	4	-4	0	0	50,472144534
36	4	-2	-2	0	52,281916275

\hat{J}	s	h	p	N'	$^{\circ}/\text{Montag}$
37	4	-2	0	0	52,512533298
38	4	0	0	0	54,552922062
39	5	-6	1	0	62,185294797
40	5	-4	-1	0	63,995066538
41	5	-2	-1	0	66,035455302
42	6	-6	0	0	75,708216801
43	6	-4	0	0	77,748605565
44	8	-8	0	0	100,944289068

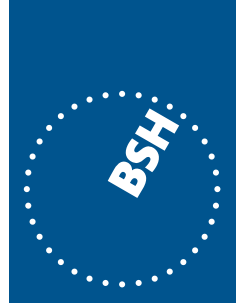
Tabelle 6: Beobachtungen und Synthesen des analysierten Datensatzes. Spalte 1: Transitnummern, Sp. 2: Fallunterscheidung (k ungerade: HW, k gerade: NW, $k \leq 2$: oberer Kulmination zugeordnet, $k > 2$: unterer Kulmination zugeordnet), Sp. 3: Datum und Zeit der Transits in oberer bzw. unterer Kulmination, Sp. 4: Transitzeit t des mittleren Mondes (nur in oberer Kulmination), Sp. 5: Beobachtungszeit der Scheitelpunkte, Sp. 6: beobachtetes HWI bzw. NWI, Sp. 7: beobachtete HWH bzw. NWH, Sp. 8: astronomische Synthese des HWI bzw. NWI, Sp. 9: astronomische Synthese der HWH bzw. NWH.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
14467	3	1990.12.31 11:46	1990.12.30 23:13	1990.12.31 23:45	24,54	6,72	24,46	6,62
14467	4	1990.12.31 11:46	1990.12.30 23:13	1991.01.01 06:40	31,45	4,29	31,55	3,43
14468	1	1991.01.01 00:18	1991.01.01 00:03	1991.01.01 12:13	12,16	7,24	12,21	6,57
14468	2	1991.01.01 00:18	1991.01.01 00:03	1991.01.01 19:18	19,25	3,68	19,04	3,52
14468	3	1991.01.01 12:50	1991.01.01 00:03	1991.01.02 00:18	24,25	6,53	24,47	6,73
14468	4	1991.01.01 12:50	1991.01.01 00:03	1991.01.02 07:28	31,41	3,08	31,63	3,39
14469	1	1991.01.02 01:20	1991.01.02 00:54	1991.01.02 13:29	12,59	6,53	12,28	6,57
14469	2	1991.01.02 01:20	1991.01.02 00:54	1991.01.02 19:44	18,84	4,03	19,06	3,54
14469	3	1991.01.02 13:49	1991.01.02 00:54	1991.01.03 01:40	24,77	7,98	24,47	6,85
14469	4	1991.01.02 13:49	1991.01.02 00:54	1991.01.03 08:48	31,90	4,33	31,71	3,41
14470	1	1991.01.03 02:16	1991.01.03 01:44	1991.01.03 13:43	11,98	7,34	12,34	6,57
14470	2	1991.01.03 02:16	1991.01.03 01:44	1991.01.03 21:26	19,70	3,68	19,07	3,55
14470	3	1991.01.03 14:43	1991.01.03 01:44	1991.01.04 02:20	24,60	6,98	24,47	6,90
14470	4	1991.01.03 14:43	1991.01.03 01:44	1991.01.04 09:23	31,65	3,63	31,75	3,41
14471	1	1991.01.04 03:08	1991.01.04 02:35	1991.01.04 14:59	12,41	6,96	12,34	6,54
14471	2	1991.01.04 03:08	1991.01.04 02:35	1991.01.04 21:39	19,07	3,98	19,00	3,52
...								
21168	3	2009.12.27 07:45	2009.12.26 20:07	2009.12.27 19:50	23,72	6,32	23,58	6,23
21168	4	2009.12.27 07:45	2009.12.26 20:07	2009.12.28 02:14	30,12	4,44	30,30	3,89
21169	1	2009.12.27 20:11	2009.12.27 20:57	2009.12.28 08:15	11,30	6,63	11,24	6,41
21169	2	2009.12.27 20:11	2009.12.27 20:57	2009.12.28 15:09	18,20	4,08	18,09	3,79

1	2	3	4	5	6	7	8	9
21169	3	2009.12.28 08:39	2009.12.27 20:57	2009.12.28 20:43	23,76	6,35	23,89	6,33
21169	4	2009.12.28 08:39	2009.12.27 20:57	2009.12.29 03:47	30,83	3,67	30,69	3,81
21170	1	2009.12.28 21:07	2009.12.28 21:48	2009.12.29 09:15	11,46	6,40	11,55	6,45
21170	2	2009.12.28 21:07	2009.12.28 21:48	2009.12.29 16:19	18,52	3,45	18,39	3,74
21170	3	2009.12.29 09:37	2009.12.28 21:48	2009.12.29 21:50	24,04	6,11	24,11	6,43
21170	4	2009.12.29 09:37	2009.12.28 21:48	2009.12.30 04:44	30,94	3,34	30,98	3,70
21171	1	2009.12.29 22:08	2009.12.29 22:38	2009.12.30 10:16	11,63	5,97	11,76	6,51
21171	2	2009.12.29 22:08	2009.12.29 22:38	2009.12.30 17:05	18,45	3,13	18,62	3,67
21171	3	2009.12.30 10:40	2009.12.29 22:38	2009.12.30 23:01	24,38	6,00	24,22	6,53
21171	4	2009.12.30 10:40	2009.12.29 22:38	2009.12.31 05:50	31,20	3,27	31,17	3,60
21172	1	2009.12.30 23:12	2009.12.30 23:29	2009.12.31 11:19	11,84	6,17	11,89	6,55
21172	2	2009.12.30 23:12	2009.12.30 23:29	2009.12.31 18:15	18,77	3,23	18,74	3,62

Formelzeichen

A	[1]	Designmatrix der Dimension $m \times n$
b	[m o. h]	Beobachtungsvektor
$c_{k,1,j}$	[h]	Koeffizienten der Ungleichheiten in Zeit ($k=1, \dots, 4$)
$c_{k,2,j}$	[m]	Koeffizienten der Ungleichheiten in Höhe ($k=1, \dots, 4$)
$c_{k,j}$	[m]	Koeffizienten der Ungleichheiten in Höhe ($k=1, \dots, 96$)
i	[1]	Transitzähler, $N_{Anfang} \leq i \leq N_{Ende}$
j	[1]	Index für die Prädiktoren ($j = 0, \dots, 88$)
\hat{j}	[1]	Index der Winkelgeschwindigkeiten ($\hat{j} = 0, \dots, 44$)
k	[1]	Ereigniszähler
N	[1]	Transitnummer
T	[d]	Zeit des wahren Transits (T_0 am 31.12.1949 um 23:08 UTC)
\hat{t}	[d]	Zeit des mittleren Transits ($\hat{t}_0 = T_0$)
t	[d]	Zeit des um $T - \hat{t}$ verschobenen mittleren Transits
HWZ	[d]	Hochwasserzeit
NWZ	[d]	Niedrigwasserzeit
HWH	[m]	Hochwasserhöhe
NWH	[m]	Niedrigwasserhöhe
HWI	[h]	Hochwasserintervall
NWI	[h]	Niedrigwasserintervall
$MHWI$	[h]	Hochwasserintervall
$MNWI$	[h]	Niedrigwasserintervall
MHW	[m]	Mittleres Hochwasser
MNW	[m]	Mittleres Niedrigwasser
ω	[°/Mondtag]	Winkelgeschwindigkeiten der harmonischen Glieder
\hat{n}	[1]	Anzahl der harmonischen Glieder
n	[1]	Anzahl der Funktionen $n = 2\hat{n} + 1$ einschließlich konstantem Anteil
m	[1]	Anzahl der in der Ausgleichung verwendeten Beobachtungen, $m \geq n$ und $m \leq N_{Ende} - N_{Anfang} + 1$
r	[m o. h]	Residuenvektor der Ungleichheiten in Höhe oder Zeit
$w_{k,1,i}$	[h]	Berechnete Hoch- oder Niedrigwasserintervalle
$w_{k,2,i}$	[m]	Berechnete Hoch- oder Niedrigwasserhöhen
$w_{k,i}$	[m]	Berechnete Wasserstände der Ganglinie



BUNDESAMT FÜR
SEESCHIFFFAHRT
UND
HYDROGRAPHIE

On Tidal Predictions by Means of Harmonic Representation of Inequalities

Gezeitenvorausberechnungen mit der Harmonischen Darstellung der Ungleichheiten

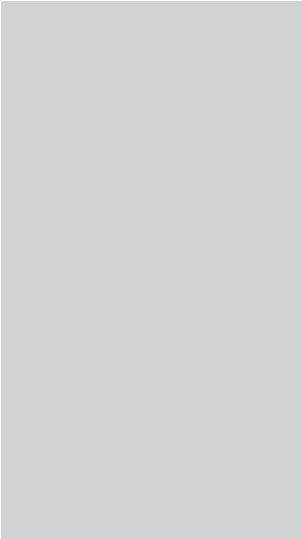
Sylvin H. Müller-Navarra

Translation from German: Aksana L. Coxhead

Contents

Abstract	5
1 Introduction	7
2 Astronomic Fundamental Principles	9
3 Harmonic Representation of Inequalities (HRoI)	11
4 Arithmetical Operation	13
a) Calculation of passage times of the true Moon over the prime meridian in upper and lower culmination	15
b) Synchronisation of the mean Moon with the transit times of the true Moon	16
c) Processing of 19 years of gauge observations	17
d) Filtering of data	17
e) Determination of the relevant angular velocities	18
f) 8 or, respectively, 96 least square fits for calculating the coefficients	19
g) Synthesis	20
5 Conclusion	21
Bibliography	23
Appendix	25
Formula symbols	29

Abstract



Water bodies with a connection to the open sea are characterised by water level fluctuations with a significant tidal proportion. In interpreting such water level time series it is therefore important to appropriately isolate the astronomically caused proportion. Only then, valid conclusions regarding meteorological, climatological and hydrological influences or even trends are possible. Not least, an analysis of tides allows also for tidal predictions, which, in the form of tide tables and, increasingly, digital illustrations, are used by shipping and coastal water resources management, to name a few users. Since 1954, the levels and times of high and low waters are calculated by the method of “harmonic representation of inequalities”. The arithmetical operation is illustrated in detail by the example of a 19-year time series from the gauging station Cuxhaven, including also illustration of the extension of the procedure to complete tide curves.

Descriptors: Tidal prediction, tide curve, inequalities

1 Introduction

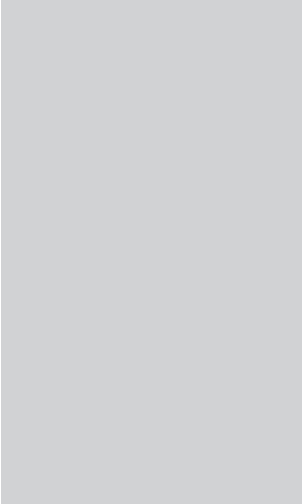
For the German coastal waters, comprehensive tide gauge time series of good quality are available; since the mid-1990s, these are available also at minute intervals. In the course of extensive research projects on global climatic fluctuations, the development of the relative sea level at some German gauging stations has likewise been researched in greater detail (Wahl et al., 2011).

The motivation for this paper is, for one, the public documentation of the German Federal Maritime and Hydrographic Agency tidal analysis procedure and, far more importantly, the fact that soon (about end of 2014) minute interval digital tide gauge data spanning 19 years will have been collected and been made available. More diversified operational harvesting of the data flow is de facto being demanded, yet this will not be possible without considered attention to the tidal proportion. Recently, a report was published by the technical-scientific association for water-borne transport, navigation, ports and waterways PIANC, which highlights the future significance of operational data services for the accessibility to sea ports (PIANC, 2012). Tidal analyses and predictions have a long-standing tradition (Cartwright, 1999). So far, three different procedures have emerged to achieve practical significance, mostly as regards the production of tide tables:

- the non-harmonic procedure,
- the harmonic procedure and
- the harmonic representation of inequalities.

The non-harmonic procedure for calculating tides (of semidiurnal form) is a procedure rendering the high and low water times of a given location by adding to the Moon's meridian transit times the mean high and low water intervals as well as the inequalities in high and low water times. The high and low water levels, i. e. marks, are rendered by adding the inequalities of high and low water heights to the mean high and low water heights. The four inequalities regarding time and level themselves are derived from the combination of one semi-monthly, parallactic, declination and daily inequality each as well as, as the case may be, also from other improvements.

The harmonic analysis of tides (e. g. Pansch, 1988, with further sources) derives from an similar decomposition of the tidal forces into harmonic parts (Hartmann and Wenzel, 1995). The angles of the individual tides, also called constituent tides, increase steadily with the local time. The various periods of the individual tides derive from the study of the movements of the Moon and the Sun; these are the same for any location on Earth. Conversely, the amplitudes and phases of the constituent tides are generally different from location to location and mark the different cycle of tides at individual locations.



The harmonic representation of inequalities (Horn, 1960) is a method for calculating tides that is similar to the non-harmonic procedure; however, the inequalities of high and low waters as regards time and level are calculated in a manner similar to the harmonic procedure by the combination of periodic elements. Unfortunately, many marine scientists use ready-made programme modules of the harmonic procedure (e.g. Pawlowicza et al., 2002) for compiling their tidal analyses and tidal syntheses, without knowing about the limitations connected with this method. Frequently, the use of synthesis programme modules creates also demand for “tide constants” from the German coastal gauging stations, even though the tidal conditions on site are by no means constant. Since 1966, the German Federal Maritime and Hydrographic Agency refrains from publishing such “constants”. Hydrographic offices in other countries still continue to issue such information, because often the local tide conditions are not as complicated as they are at the German flat coasts.

2 Astronomic Fundamental Principles

The chronological sequence of marine tides has been associated with the Moon's and the Sun's relative positions to Earth already since ancient times. A characteristic of North Sea tides is the fact that to each upper culmination of the Moon can be assigned a high water and the ensuing low water. On average 12 h 25 min later, after the lower culmination, follows another high water and subsequent low water. The average time passing between the Moon's transit over the prime meridian in upper culmination (or over 180° W in lower culmination) and the onset of the next following high water is called mean high water interval (MHWI). In the German Bight, intervals between 9 h 45 min (Borkum) and 16 h 27 min (Geesthacht) are observed; in Cuxhaven, the interval is 11 h 50 min (cf. Table 3).

In contrast to wide parts of the global ocean with its fringing and marginal seas, the North Sea tides are very regular, in particular within the German Bight; mostly these are semi-diurnal with tidal ranges of 2 to 4 m. The astronomically explicable deviations of high and low water intervals from their mean values are less than 1 h. The correspondent height deviations vary in the amount of less than 0,5 m. Because this is so, temporal mean values of levels and intervals already provide good approximations for each individual case.

A detailed illustration of the celestial rudiments of tidal theory shall be dispensed with here. Commendable illustrations of tides as a function of time have been published already by Horn (1948 and 1960).

3 Harmonic Representation of Inequalities (HRol)

The harmonic representation of inequalities seizes the idea of the non-harmonic procedure, which has been used for a long time to create, based on observations of the Moon, serviceable tidal predictions for high and low water heights and times (Lubbock, 1831). Towards the end of the nineteenth century, the non-harmonic procedure had become almost entirely displaced by the harmonic procedure, since the latter enabled the calculation of complete curves (for a detailed list of references see Cartwright, 1999). Up until 1953, the German tide tables were likewise calculated by this method; however, the results remained unsatisfactory in spite of the enormous effort (Pansch, 1989). Since shipping was content with the forecast of the vertices (HWH, LWH), Horn (1948) suggested a more economic procedure and introduced it into practice (Horn, 1960), which has been in use since 1954 to compile the German tide tables. Since as yet no in detail comprehensible documentation exists for the method of “Harmonic Representation of Inequalities” practised at the German Federal Maritime and Hydrographic Agency since 1953, this paper aims to fill this gap. To begin with, I shall introduce the acronym HRol for the method’s long name. The method’s name already conveys the important information that this is not about the calculation of the overall signal of water level, but only about the mathematical description of the deviations from mean values of any kind. The word inequalities has been used for a long time in celestial mechanics; it indicates marked disturbances in the Moon’s only seemingly uniform movement, which had been observed already in antiquity (Smits, 1910).

4 Arithmetical Operation

HROI can be used for the calculation both of vertices (high water time HWT, high water height HWH, low water time LWT, low water height LWH) and of tide hydrographs. The vertices require 8 least square fits, since one has to differentiate between transits over the prime meridian in the upper culmination and over 180° west longitude in the lower culmination. In the case of the hydrographs, the number of sampling points is determined on the basis of the time step. For instance, the choice of a time step of 15 Moon minutes (=15.5257515 min) necessitates 96 least square fits. A larger time step does not seem useful given the rather fast rise speeds at some tide gauges at the onset of the flood current, whereas a smaller one may well be useful, provided the availability of sufficient computing capacities.

Syntheses of vertex times and analogously of vertex levels (Table 1) are effected by equation (1). The synthesis regarding onset of individual HW and LW produces the time lag after the respective preceding mean transits t_i (see below).

$$w_{k,l,i} = c_{k,l,0} + \sum_{j=1}^{\hat{n}} (c_{k,l,j=2j-1} \cos \omega_j \cdot i + c_{k,l,j=2j} \sin \omega_j \cdot i); \quad k = 1, \dots, 4; l = 1, 2 \quad (1)$$

with $i = N_{start}, \dots, N_{end}$.

Table 1: Inequalities in time (l=1) and height (l=2). (k=1,2: upper culmination, k=3,4: lower culmination)

Inequalities		
	l=1	l=2
k=1	$w_{1,1,i} = \text{HWT}_i - t_i$	$w_{1,2,i} = \text{HWH}_i$
k=2	$w_{2,1,i} = \text{LWT}_i - t_i$	$w_{2,2,i} = \text{LWH}_i$
k=3	$w_{3,1,i} = \text{HWT}_i - t_i$	$w_{3,2,i} = \text{HWH}_i$
k=4	$w_{4,1,i} = \text{LWT}_i - t_i$	$w_{4,2,i} = \text{LWH}_i$

Table 2: Significance of constant parts from (1). (k=1,2: upper culmination, k=3,4: lower culmination)

Significance		
	l=1	l=2
k=1	$c_{1,1,0} = \text{MHWI}$	$c_{1,2,0} = \text{MHW}$
k=2	$c_{2,1,0} = \text{MLWI}$	$c_{2,2,0} = \text{MLW}$
k=3	$c_{3,1,0} = \text{MHWI}$	$c_{3,2,0} = \text{MHW}$
k=4	$c_{4,1,0} = \text{MLWI}$	$c_{4,2,0} = \text{MLW}$

In the case of calculating hydrographs, the times are defined within a fixed grid with 96 sampling points. The index $k=1$ is arbitrarily assigned to a point in time $1/8$ Moon hour after transit in upper culmination plus MHWI; thus, this point in time is approximately 7.8 min after the corresponding high water (Figure 1). The other points in time 2 to 96 each follow in intervals of $1/4$ Moon hours.

$$w_{k,i} = c_{k,0} + \sum_{j=1}^{\hat{n}} (c_{k,j=2j-1} \cos \omega_j \cdot i + c_{k,j=2j} \sin \omega_j \cdot i); \quad k = 1, \dots, 96 \quad (2)$$

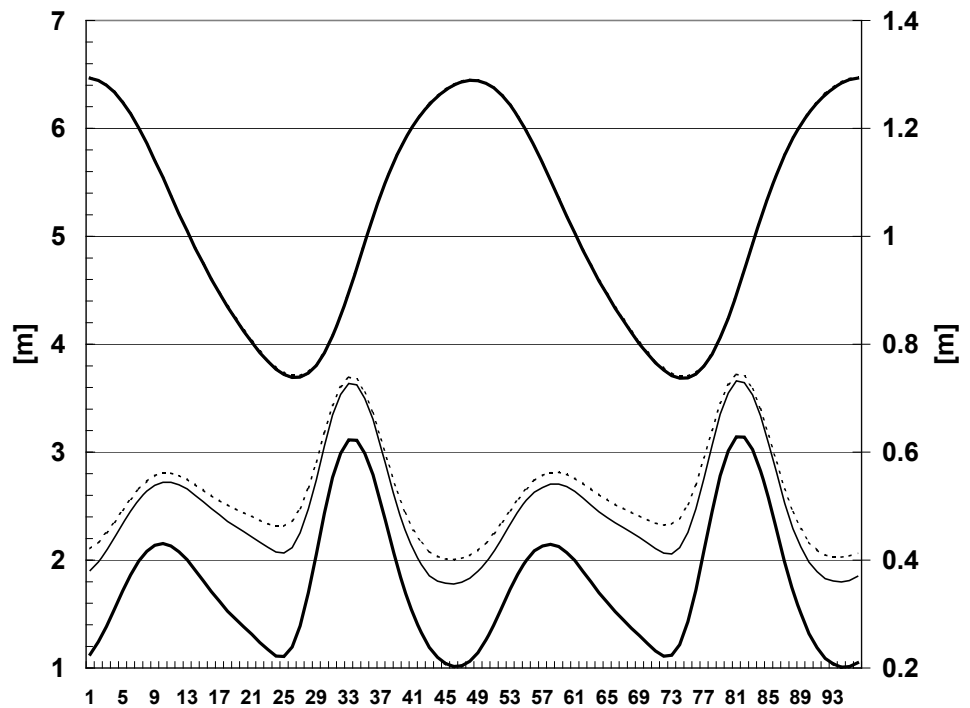


Figure 1: Mean values (above, left ordinate scale [m above gauge zero GZ]) and standard deviation (below, right ordinate scale [m]) of complete data set (dotted line), of 3 SD filtered data set (thin line) and of tidal synthesis (thick line), fixed grid with 96 sampling points.

Since the relevant angular velocities ω_j can be judiciously chosen from the components of the tide-generating potential (Hartmann and Wenzel, 1995), this is largely about determining the coefficients $c_{k,l,j}$ (1) and $c_{k,j}$ (2), respectively. This somewhat fickle calculation of coefficients is called tidal analysis; the simple application of the equations (1) and (2), respectively, is called tidal synthesis.

Given the consequent application of the identifier Moon transit, the tidal analysis is easy to accomplish. This becomes particularly evident by the arguments of the trigonometric functions in (1) and (2) $\omega_j \cdot i$, respectively. The angular velocity, recorded as $^{\circ}/\text{Moon day}$, acquires values between 0 and $100^{\circ}/\text{Moon}$

day (Table 5); i counts the transits of the Moon and one only has to bear in mind that this numerator has the same zero point both in analysis and synthesis. The following paragraphs will put the reader in a position, if required, to develop his or her own computer programme for tidal analysis and synthesis. The problem can be roughly organised into 7 steps a) to g):

- a) Calculation of passage times of the true Moon over the prime meridian in upper and lower culmination,
- b) Synchronisation of the mean Moon with the transit times of the true Moon,
- c) Processing of 19 years of gauge observations,
- d) Filtering of data (3 standard deviations),
- e) Determination of the relevant angular velocities,
- f) 8 or, respectively, 96 least square fits for calculating the coefficients and
- g) Synthesis.

a) Calculation of passage times of the true Moon over the prime meridian in upper and lower culmination

Here, the transit time shall be defined as the point in time of the Moon's transit (centre of mass) over the prime meridian (Greenwich Observatory). A procedure exact to the minute can be programmed on the basis of the data given in Meeus (1998), chapters 7, 10, 13, 22, 47. Alternatively, one may substitute tables obtained from astronomical service providers. Due to the uncertainty of gauge observations (see c)), it is not necessary to observe a high degree of accuracy in transit calculations.

b) Synchronisation of the mean Moon with the transit times of the true Moon

Our experiences regarding the chronology of natural events and phenomena are oriented, within the rough framework of time zones, on the Sun's transit over the local meridian. The temporal allocation of natural phenomena is significantly disturbed by the change between summer and winter time as stipulated by law. It is urgently recommended to use UTC during the entire arithmetical operation a) to g) and to convert the data into legal times only for the purpose of creation of local products.

The mean Moon is defined as a fictive celestial object orbiting Earth on the equatorial plane. Its transits over the upper and lower local meridian occur at intervals of $360^\circ / (28.9841042^\circ/\text{h}) = 12.4206012 \text{ h}$ [NB: in Müller-Navarra (2009), bottom of page 386, this number is incorrect from the 6th decimal place onwards.]. This time, divided by 12, results in a Moon hour of 1.0350501 h. The given 7 decimal places are fully sufficient for calculating multiples of this Moon hour in order to define the time grid, which then is superimposed on the water gauge time series.

It is advisable to number the Moon transits and to apply these numbers also to the following four vertices (Müller-Navarra, 2009). The transit of the true Moon over the prime meridian in upper culmination on 31 December 1949 at 21:08 UTC (T_0) is given the number zero. The preceding transits are given negative numbers, the subsequent transits are given positive numbers. For example, the transit on 4 September 2006 carries the number 20,000.

Finally, the time grid of the mean Moon has to be fixated to the time line, so that the high and low water intervals (Table 2) can be represented directly by the coefficients $c_{k,1,0}$; $k = 1, \dots, 4$. To this end, the grid of the mean Moon is set in such a manner that $\hat{t}_0 = T_0$. If one now compares the true transits with the thus fixated mean transits, the former reveal significant inequalities, which were in part known already in antiquity. These astronomical inequalities with a standard deviation of approximately 21 minutes are reflected in the natural, meteorologically disturbed tidal gauges as greater inequalities in time. The mean value $T - \hat{t}$ for the time period 01 January 1801 to 30 December 2049 is approximately +24.23 min; in a final step, the time grid of the mean Moon is moved by just this value, so that $t = \hat{t} + T - \hat{t}$. Within the procedure, all times t , \hat{t} and T are calculated as a day number (Müller-Navarra, 2009). It is then a simple step to derive from these day numbers temporal differences with the onset of vertices, e. g. high water or low water intervals (Table 6, Column 6).

c) Processing of 19 years of gauge observations

The astronomical rudiments of tidal theory have been sufficiently described (Horn, 1948). From these derives, amongst other things, the demand for the simultaneous analysis of respective time periods of at least 19 years. Table 6 in the appendix shows the beginning (31 Dec 1990, 23:45 UTC) and the end (31 Dec 2009, 18:15 UTC) of the time period of vertex observations at the Cuxhaven gauging station, transit times of the Moon and syntheses.

The observed vertex times and levels (Table 6, Columns 5 and 7) must first be paired with the Moon transits (Columns 1 and 2). For this, definite mapping can be achieved for calm weather conditions (Müller-Navarra, 2009). In the event of strong storms, when onset times deviate from HWT and LWT by several hours, amends are required. Yet this, too, may be largely automated. The data set from the Cuxhaven gauging station – the basis for these analyses – ranges from high water after lower culmination ($i=14467$, $k=3$) to low water after upper culmination ($i=21172$, $k=2$).

In the case of the hydrograph illustration, for the same period of time, each transit at upper culmination is assigned 96 subsequent sampling points (see above).

d) Filtering of data

Since the water level measured at coastal gauging stations proves to be very susceptible to wind, cumulative stormy years with many storm surges or long periods of lowered water levels can “spoil” the forecast, especially as regards the long-periodic elements. Filtering of the 19-year time series has proven itself in practice, excluding all individual cases deviating by more than 3 standard deviations from the mean value. Table 3 shows mean values and standard deviations for the observation, the filtered data set and the vertex value forecast. Filtering cancels out only 0.1% of data as regards the onset times and approximately 1.5% of observations as regards the water levels.

In the case of hydrograph processing, the mean values and the standard deviation (SD) are represented in a graph (Figure 1). Here, the numbers of cases on average at 6623 and, after filtering, at 6563 of 6689 possible numbers. It is conspicuous that the greatest standard deviations occur approximately 2 h after LWT. This is precisely where the main problem of hydrograph forecasting for tidal rivers lies. The further upstream the tide gauge, the shorter the flood duration and the faster the water level rises. In extreme cases, sometimes also only at spring tide, this can result in phenomena akin to tidal bores with flood durations being virtually zero.

Table 3: Mean values and standard deviation of inequalities regarding height and time (time period: 1991–2009; $i=14467$ to 21172 ; $m \leq 6706$)

k	l	Observational data			Filtered data			Synthesis		
		m	Mean value	SD	m	Mean value	SD	m	Mean value	SD
1	1	6704	11:50 h:min	40,62 min	6697	11:50 h:min	40,30 min	6706	11:50 h:min	38,85 min
1	2	6704	6,54 mGZ	0,41 m	6609	6,53 mGZ	0,36 m	6706	6,54 mGZ	0,19 m
2	1	6704	18:40 h:min	44,27 min	6694	18:40 h:min	43,78 min	6706	18:40 h:min	42,76 min
2	2	6704	3,58 mGZ	0,45 m	6601	3,55 mGZ	0,39 m	6706	3,56 mGZ	0,20 m
3	1	6703	24:14 h:min	40,89 min	6696	24:14 h:min	40,67 min	6706	24:14 h:min	39,31 min
3	2	6703	6,52 mGZ	0,41 m	6597	6,51 mGZ	0,36 m	6706	6,51 mGZ	0,19 m
4	1	6705	31:05 h:min	45,00 min	6696	31:05 h:min	44,69 min	6706	31:05 h:min	43,42 min
4	2	6705	3,57 mGZ	0,45 m	6602	3,55 mGZ	0,39 m	6706	3,55 mGZ	0,20 m

e) Determination of the relevant angular velocities

The relevant angular velocities ω_j are integral linear combinations

$$\omega_j = \alpha s + \beta h + \gamma p + \delta N' \quad (3)$$

with $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ (for meaning and values of multiplicands see Table 4). Choice and number of ω_j in Table 5 allows for modifications. In the long-periodic range (No. 1–6), Horn (1960) narrows down to No. 1, 4, 5 and 6. The fact that only four basic periods are sufficient for the representation of inequalities as regards height and time, whereas six are required for the exact description of the tide-generating potential of Moon and Sun, may be surprising. Horn (1948) explains why; here it can be added that the orbital period of the perihelion of approximately 20,940 years may be discounted.

Table 4: Numeric values for the four variables in the coordinates of Moon and Sun in °/Moon day and related periods (cf. Table 5)

Designation	[°/Moon day]	Period [a]
s	13,638230516	27,321583 days=tropical Month
h	1,020194382	365,242196 days=tropical year
p	0,115308512	8,84752 years=orbital period of mean perigee
N'	0,054809904	18,6133 years=orbital period of the mean node

f) 8 or, respectively, 96 least square fits for calculating the coefficients

The coefficients $c_{k,l,j}$ in equation (1) with $j = 0 \dots 2\hat{n}$ – at respectively retained k and l – are determined on the basis of a sufficient number of (filtered) observations by $k \cdot l = 8$ least square fits in such a manner that

$$\| \mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{b} \|_2 \xrightarrow{\mathbf{c} \in R^n} \text{Minimum!} \quad \mathbf{A} \in R^{m,n}, \mathbf{b} \in R^m \text{ with } m \geq n. \quad (4)$$

In the event of $l=1$, the vector \mathbf{b} consists of observed time differences $HWI = HWT_i^{obs} - t_i$ or $LWI = LWT_i^{obs} - t_i$ and in the event of $l=2$, it consists of HWH or LWH. Due to filtering $m \leq N_{start} - N_{end} + 1$. Thus, a solution $\mathbf{c} \in R^n$ is required for the linear root mean square problem (4) and hence a vector \mathbf{c} , which minimises the residuum $\mathbf{r}(\mathbf{c}) := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{c}$ of the overdetermined system in the Euclidean norm. For calculating the vector \mathbf{c} a method with singular value decomposition after Golub and Reinsch (1970) was used.

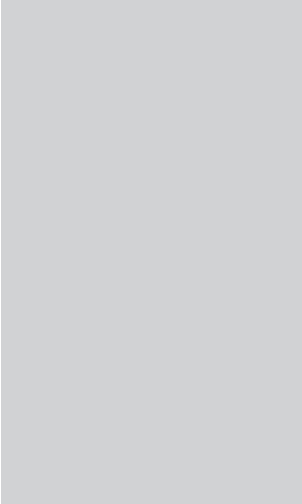
In the case of 2 with $k=96$ least square fits for calculating the coefficients $c_{k,j}$ of the hydrograph (tidal curve), the method is analogous to case 1, with the difference that the points in time are already predetermined by fixed intervals of 1/4 Moon hour.

g) Synthesis

Synthesis is effected by equations (1) and (2), respectively. The question remains open, for which prediction and retrodiction time periods the coefficients retain their validity. After all, these coefficients do by no means represent “constants”. Tides are natural events and are subject to steady albeit minimal change. In particular with regard to gauge time series of tidal rivers it is recommended to conduct synthesis on the basis of analyses of the immediately preceding 19 years, in as far as these are already available. If one was to calculate post hoc syntheses for a longer period of observations, one can determine coefficients spanning 19 years and use these to respectively generate only the central year. The syntheses for the first and last nine years then are calculated by means of an unchanged set of coefficients.

When generating tide tables for tidal rivers, especially in the years following fairway adjustments, it has proven useful to generate particularly constant members (Table 2), e.g. from previous years and to disregard in synthesis (1) and (2) the long-periodic proportions with \hat{j}_1 and \hat{j}_2 (Table 5). Such optimisation of the here presented method leaves room for further development work.

5 Conclusion



The procedure presented here allows for the analysis of long time series of (incomplete) high and low water observations as well as of hydrographs. Post hoc determination and elimination of tidal proportions from such time series enables, for example, the utilisation of residues, also called wind surge, as a proxy for regional wind. Amongst other things, climate research focuses on the assessment of future extreme weather conditions, including storms and enduring weather conditions. In principle, local wind surge is easier to determine in retrospect than is the wind, for which, as a rule, often only inhomogeneous data sets are available. Wind surge enables, for example, investigation into whether in the German Bight the frequency of onshore wind ($290^{\circ} \pm 90^{\circ}$) has changed compared to the frequency of offshore wind ($110^{\circ} \pm 90^{\circ}$). A corresponding study on wind surge and on the relative sea level rise at the Cuxhaven gauging station is currently being prepared in co-operation with the University of Siegen and the National Meteorological Service of Germany.

Bibliography

- Cartwright, D. E. (1999) *Tides: a scientific history*. Cambridge University Press. 292 S.
- Golub, G.H., C. Reinsch (1970) Singular Value Decomposition and Least Square Solutions. *Numer. Math.* 14, 403–420
- Hartmann, T., H.-G. Wenzel (1995) Catalogue HW95 of the tide generating potential. *Bull. Inf. Marées Terrestres* 123, 9278–9301
- Horn, W. (1948) Über die Darstellung der Gezeiten als Funktion der Zeit. *Dt. hydrogr. Z.* 1, 124–140
- Horn, W. (1960) Some Recent Approaches to Tidal Problems. *Int. Hydrogr. Rev.* 37(2), 65–84
- Lubbock, J. W. (1831) On the Tides of the Port of London. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 121, 379–415
- Meeus, J. (1998) *Astronomical Algorithms*. Second Edition. Willmann-Bell, Inc. 477 pp.
- Müller-Navarra, S. H. (2009) Zur automatischen Scheitelpunktbestimmung gemessener Tidekurven in der Deutschen Bucht. *Hydrologie und Wasserbewirtschaftung* 53, 380–388
- Müller-Navarra, S.H., H. Giese (1999) Improvements of an Empirical Model to Forecast Wind Surge in the German Bight. *Dt. hydrogr. Z.* 51, 385–405
- Müller-Navarra, S. H., K. Knüpfer (2010) Improvement of water level forecasts for tidal harbours by means of model output statistics (MOS) – Part I (Skew surge forecast). *Berichte des Bundesamtes für Seeschifffahrt und Hydrographie* 47. 22 pp.
- Pansch, E. (1988) Harmonische Analyse von Gezeiten- und Gezeitenstrombeobachtungen im Deutschen Hydrographischen Institut, Hamburg. Deutsches Hydrographisches Institut, Nr. 2350, *Wissenschaftlich-Technische Berichte* 1988-1. Hamburg. 32 S.
- Pansch, E. (1989) New Harmonic Tidal Constants for some German North Sea Stations. *Dt. Hydrogr. Z.* 42, 27–39
- PIANC report no. 117 (2012) *Use of hydro/meteo information for port access and operation*. Brussels. 93 S.
- Pawlowicza, R., B. Beardsley, S. Lentz (2002) Classical tidal harmonic analysis including error estimates in MATLAB using T_TIDE. *Computers & Geosciences* 28, 929–937
- Smits, P. J. (1910) Uit des geschiedenis van de ontwikkeling der getijtheorie. *De Zee* 32, 633–653
- Wahl, T., J. Jensen, T. Frank, I. D. Haigh (2011): Improved estimates of mean sea level changes in the German Bight over the last 166 years. *Ocean Dynamics* 61, 701–715

Appendix

Table 5: Argument numbers and angular velocities ω_j [modified and augmented after Horn (1960)]. No. 1, 2, 4 and 12 highlighted [cf. Table 4].

\hat{j}	s	h	p	N'	°/Moon day
0	0	0	0	0	0.000000000
1	0	0	0	1	0.054809904
2	0	0	1	0	0.115308512
3	0	1	-1	0	0.904885870
4	0	1	0	0	1.020194382
5	0	2	-2	0	1.809771741
6	0	2	0	0	2.040388764
7	1	-2	0	0	11.597841752
8	1	-2	1	0	11.713150263
9	1	0	-1	-1	13.468112100
10	1	0	-1	0	13.522922004
11	1	0	0	-1	13.583420612
12	1	0	0	0	13.638230516
13	1	0	0	1	13.693040419
14	1	2	-1	0	15.563310768
15	2	-4	2	0	23.426300526
16	2	-3	0	0	24.215877885
17	2	-2	0	-1	25.181262364
18	2	-2	0	0	25.236072267
19	2	-2	0	1	25.290882171
20	2	-2	1	0	25.351380779
21	2	0	-2	0	27.045844008
22	2	0	-1	0	27.161152519
23	2	0	0	-1	27.221651128
24	2	0	0	0	27.276461031
25	2	0	0	1	27.331270935
26	3	-4	1	0	36.949222530
27	3	-3	-1	0	37.738799889
28	3	-2	-1	-1	38.704184367
29	3	-2	-1	0	38.758994271
30	3	-2	-1	1	38.813804174
31	3	-2	0	0	38.874302783
32	3	-2	1	0	38.989611294
33	3	0	-1	0	40.799383035
34	4	-5	0	0	49.451950152
35	4	-4	0	0	50.472144534
36	4	-2	-2	0	52.281916275

\hat{J}	s	h	p	N'	$^{\circ}/\text{Moon day}$
37	4	-2	0	0	52.512533298
38	4	0	0	0	54.552922062
39	5	-6	1	0	62.185294797
40	5	-4	-1	0	63.995066538
41	5	-2	-1	0	66.035455302
42	6	-6	0	0	75.708216801
43	6	-4	0	0	77.748605565
44	8	-8	0	0	100.944289068

Table 6: Observational data and syntheses of analysed data set. Column 1: Transit numbers, Column 2: Case differentiation (k uneven: HW, k even: LW, $k \leq 2$: assigned to upper culmination, $k > 2$: assigned to lower culmination), Column 3: Date and time of transit in upper or, respectively, lower culmination, Column 4: Transit time t of mean Moon (only in upper culmination), Column 5: Observation time of vertices, Column 6: Observed HWI or, respectively, LWI, Column 7: Observed HWH or, respectively, LWH, Column 8: Astronomical synthesis of HWI or, respectively, LWI, Column 9: Astronomical synthesis of HWH or, respectively, LWH.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
14467	3	1990.12.31 11:46	1990.12.30 23:13	1990.12.31 23:45	24.54	6.72	24.46	6.62
14467	4	1990.12.31 11:46	1990.12.30 23:13	1991.01.01 06:40	31.45	4.29	31.55	3.43
14468	1	1991.01.01 00:18	1991.01.01 00:03	1991.01.01 12:13	12.16	7.24	12.21	6.57
14468	2	1991.01.01 00:18	1991.01.01 00:03	1991.01.01 19:18	19.25	3.68	19.04	3.52
14468	3	1991.01.01 12:50	1991.01.01 00:03	1991.01.02 00:18	24.25	6.53	24.47	6.73
14468	4	1991.01.01 12:50	1991.01.01 00:03	1991.01.02 07:28	31.41	3.08	31.63	3.39
14469	1	1991.01.02 01:20	1991.01.02 00:54	1991.01.02 13:29	12.59	6.53	12.28	6.57
14469	2	1991.01.02 01:20	1991.01.02 00:54	1991.01.02 19:44	18.84	4.03	19.06	3.54
14469	3	1991.01.02 13:49	1991.01.02 00:54	1991.01.03 01:40	24.77	7.98	24.47	6.85
14469	4	1991.01.02 13:49	1991.01.02 00:54	1991.01.03 08:48	31.90	4.33	31.71	3.41
14470	1	1991.01.03 02:16	1991.01.03 01:44	1991.01.03 13:43	11.98	7.34	12.34	6.57
14470	2	1991.01.03 02:16	1991.01.03 01:44	1991.01.03 21:26	19.70	3.68	19.07	3.55
14470	3	1991.01.03 14:43	1991.01.03 01:44	1991.01.04 02:20	24.60	6.98	24.47	6.90
14470	4	1991.01.03 14:43	1991.01.03 01:44	1991.01.04 09:23	31.65	3.63	31.75	3.41
14471	1	1991.01.04 03:08	1991.01.04 02:35	1991.01.04 14:59	12.41	6.96	12.34	6.54
14471	2	1991.01.04 03:08	1991.01.04 02:35	1991.01.04 21:39	19.07	3.98	19.00	3.52
...								
21168	3	2009.12.27 07:45	2009.12.26 20:07	2009.12.27 19:50	23.72	6.32	23.58	6.23
21168	4	2009.12.27 07:45	2009.12.26 20:07	2009.12.28 02:14	30.12	4.44	30.30	3.89
21169	1	2009.12.27 20:11	2009.12.27 20:57	2009.12.28 08:15	11.30	6.63	11.24	6.41

1	2	3	4	5	6	7	8	9
21169	2	2009.12.27 20:11	2009.12.27 20:57	2009.12.28 15:09	18.20	4.08	18.09	3.79
21169	3	2009.12.28 08:39	2009.12.27 20:57	2009.12.28 20:43	23.76	6.35	23.89	6.33
21169	4	2009.12.28 08:39	2009.12.27 20:57	2009.12.29 03:47	30.83	3.67	30.69	3.81
21170	1	2009.12.28 21:07	2009.12.28 21:48	2009.12.29 09:15	11.46	6.40	11.55	6.45
21170	2	2009.12.28 21:07	2009.12.28 21:48	2009.12.29 16:19	18.52	3.45	18.39	3.74
21170	3	2009.12.29 09:37	2009.12.28 21:48	2009.12.29 21:50	24.04	6.11	24.11	6.43
21170	4	2009.12.29 09:37	2009.12.28 21:48	2009.12.30 04:44	30.94	3.34	30.98	3.70
21171	1	2009.12.29 22:08	2009.12.29 22:38	2009.12.30 10:16	11.63	5.97	11.76	6.51
21171	2	2009.12.29 22:08	2009.12.29 22:38	2009.12.30 17:05	18.45	3.13	18.62	3.67
21171	3	2009.12.30 10:40	2009.12.29 22:38	2009.12.30 23:01	24.38	6.00	24.22	6.53
21171	4	2009.12.30 10:40	2009.12.29 22:38	2009.12.31 05:50	31.20	3.27	31.17	3.60
21172	1	2009.12.30 23:12	2009.12.30 23:29	2009.12.31 11:19	11.84	6.17	11.89	6.55
21172	2	2009.12.30 23:12	2009.12.30 23:29	2009.12.31 18:15	18.77	3.23	18.74	3.62

Formula symbols

A	[1]	Design matrix of the dimension $m \times n$
b	[m or h]	Observation vector
$c_{k,1,j}$	[h]	Coefficients of inequalities in time ($k=1, \dots, 4$)
$c_{k,2,j}$	[m]	Coefficients of inequalities in height ($k=1, \dots, 4$)
$c_{k,j}$	[m]	Coefficients of inequalities in height ($k=1, \dots, 96$)
i	[1]	Transit counter, $N_{start} \leq i \leq N_{end}$
j	[1]	Index for predictors ($j = 0, \dots, 88$)
\hat{j}	[1]	Index of angular velocities ($\hat{j} = 0, \dots, 44$)
k	[1]	Event counter
N	[1]	Transit number
T	[d]	Time of true transit (T_0 on 31 Dec 1949 at 23:08 UTC)
\hat{t}	[d]	Time of mean transit ($\hat{t}_0 = T_0$)
t	[d]	Time of the mean transit shifted by $\overline{T - \hat{t}}$
HWT	[d]	High water time
LWT	[d]	Low water time
HWH	[m]	High water height
LWH	[m]	Low water height
HWI	[h]	High water interval
LWI	[h]	Low water interval
$MHWI$	[h]	Mean high water interval
$MLWI$	[h]	Mean low water interval
MHW	[m]	Mean high water
MLW	[m]	Mean low water
ω	[°/Moon day]	Angular velocities of harmonic members
\hat{n}	[1]	Number of harmonic members
n	[1]	Number of functions $n = 2\hat{n} + 1$ including constant proportion
m	[1]	Number of observational data used in least square fit, $m \geq n$ and $m \leq N_{end} - N_{start} + 1$
r	[m o. h]	Residues vector of inequalities in height or time
$w_{k,1,i}$	[h]	Calculated high or low water intervals
$w_{k,2,i}$	[m]	Calculated high or low water heights
$w_{k,i}$	[m]	Calculated water levels of hydrograph

Berichte des Bundesamtes für Seeschifffahrt und Hydrographie

Verzeichnis der veröffentlichten Arbeiten

- 1 (1994) Sy, A., Ulrich, J. North Atlantic Ship-of-Opportunity XBT Programme 1990 – Data Report, 134 pp.
- 2 (1994) Hagen, E., Mittelstaedt, E., Feistel, R., Klein, H. Hydrographische Untersuchungen im Ostrandstromsystem vor Portugal und Marokko 1991–1992, 49 pp.
- 3 (1994) Oliczewski, J., Schmidt, D. Entwicklung einer Bestrahlungsapparatur zum photochemischen Aufschluß von Meerwasserproben zur Bestimmung von Schwermetallen, 70 pp.
- 4 (1994) BSH [Hrsg.] Das UN-Seerechtsübereinkommen tritt in Kraft: Inhalte und Konsequenzen für die Bundesrepublik Deutschland, 71 pp.
- 5 (1995) BSH [Hrsg.] Nationale Folgerungen aus dem Inkrafttreten des UN-Seerechtsübereinkommens, 103 pp.
- 6 (1995) Haffer, E., Schmidt, D. Entwicklung eines Probenvorbereitungsverfahrens zur Bestimmung von Arsen im Meerwasser mit der Totalreflexions-Röntgenfluoreszenzanalyse, 109 pp.
- 7 (1995) BSH [Hrsg.] Global Ocean Observing System – Statusbericht, 100 pp.
- 8 (1996) Mittelstaedt, E., Meincke, J., Klein, H. WOCE-Current measurements: The ACM8 array – Data Report, 150 pp.
- 9 (1996) BSH [Hrsg.] GOOS Workshop – Anforderungen an ein wissenschaftliches Konzept für den deutschen Beitrag, 60 pp.
- 10 (1997) Sterzenbach, D. Entwicklung eines Analyseverfahrens zur Bestimmung von chlorierten Kohlenwasserstoffen in marinen Sedimenten und Schwebstoffen unter besonderer Berücksichtigung der überkritischen Fluidextraktion, 233 pp.
- 11 (1997) Jonas, M., Richter, R. Stand und Entwicklungstendenzen nautischer Systeme, Anlagen und Geräte an Bord von Seeschiffen, 37 pp.
- 12 (1997) Wedekind, C., Gabriel, H., Goroncy, I., Främke, G., Kautsky, H. „Meteor“-Reise Nr. 71/1985, Norwegen–Grönlandsee – Datenbericht, 44 pp.
- 13 (1998) BSH [Hrsg.] HELCOM Scientific Workshop – The Effects of the 1997 Flood of the Odra and Vistula Rivers, 46 pp.
- 14 (1998) Berger, R., Klein, H., Mittelstaedt, E., Ricklefs, K., Ross, J. Der Wasseraustausch im Tidebecken Hörnum-Tief – Datenreport, 260 pp.
- 15 (1998) Röske, F. Wasserstandsvorhersage mittels neuronaler Netze. 212 pp.
- 16 (1998) Ross, J., Mittelstaedt, E., Klein, H., Berger, R., Ricklefs, K. Der Wasseraustausch im Tidebecken Hörnum-Tief – Abschlußbericht, 98 pp.
- 17 (1998) Klein, H. OPUS-Current Measurements: Mecklenburg Bight and Fehmarnbelt – Data Report, 150 pp.
- 18 (1999) BSH [Hrsg.] Deutscher Programmbeitrag zum Globalen Ozeanbeobachtungssystem (GOOS), 67 pp.
- 19 (1999) BSH [Hrsg.] German Programme Contribution to the Global Ocean Observing System (GOOS), 71 pp.
- 20 (1999) Sztobryn, M., Stanislawczyk, I., Schmelzer, N. Ice Conditions in the Szczecin and Pomeranian Bay During the Normal Period from 1961–1990, 36 pp.
- 21 (1999) Nies, H., Karcher, M., Bahe, C., Backhaus, J., Harms, I. Transportmechanismen radioaktiver Substanzen im Arktischen Ozean – Numerische und experimentelle Studien am Beispiel der Barents- und Karasee, 134 pp.
- 22 (2000) Lorbacher, K. Niederfrequente Variabilität meridionaler Transporte in der Divergenzzone des nordatlantischen Subtropen- und Subpolarwirbels – Der WOCE-Schnitt A2, 156 pp.

- 23 (2000) Klein, H. The Subsurface Eastern Boundary Current of the North Atlantic between 32° N and 53° N – Data Report, 240 pp.
- 24 (2000) Klein, H. Strömungen und Seegangsverhältnisse westlich der Insel Hiddensee – Datenreport, 59 pp.
- 25 (2001) Goedecke, E. Der hydrographische Aufbau in der Deutschen Bucht vornehmlich dargestellt auf Grund der vorliegenden Unterlagen über Temperatur, Salzgehalt und Dichte, 202 pp.
- 26 (2001) Klein, H., Mittelstaedt, E. Strömungen und Seegangsverhältnisse vor Graal-Müritz und in der Tromper Wiek – Datenreport, 162 pp.
- 27 (2001) Klein, H., Mittelstaedt, E. Gezeitenströme und Tidekurven im Nahfeld von Helgoland, 24 pp. und Anhang.
- 28 (2001) Behnke, J., Berking, B., Herberg, J., Jonas, M., Mathes, S. Functional Scope and Model of Integrated Navigation Systems – A Toolbox for Identification and Testing, 181 pp.
- 29 (2001) Dick, S., Kleine, E., Müller-Navarra, S., Klein, H., Komo, H. The Operational Circulation Model of BSH (BSHcmod) – Model description and validation, 49 pp.
- 30 (2002) Sy, A., Ulrich, J., Weichert, H.-J. Upper Ocean Climate Ship-of-Opportunity Programme of BSH – A Status Report, 45 pp.
- 31 (2003) Dahlmann, G. Characteristic Features of Different Oil Types in Oil Spill Identification, 48 pp.
- 32 (2003) Nies, H., Gaul, H., Oestereich, F., Albrecht, H., Schmolke, S., Theobald, N., Becker, G., Schulz, A., Frohse, A., Dick, S., Müller-Navarra, S., Herklotz, K. Die Auswirkungen des Elbehochwassers vom August 2002 auf die Deutsche Bucht, 81 pp.
- 33 (2003) Loewe, P., Becker, G., Brockmann, U., Frohse, A., Herklotz, K., Klein, H., Schulz, A. Nordsee und Deutsche Bucht 2002 – Ozeanographischer Zustandsbericht
- 34 (2004) Schulz, G. Geomagnetic Results Wingst 1996, 1997, 1998 and 1999 including the complete Wingst data set since 1939 on CD-ROM
- 35 (2004) Gouretski, V. V., Koltermann, K. P. WOCE Global Hydrographic Climatology
- 36 (2004) Gayer, G., Dick, S., Pleskachevsky, A., Rosenthal, W. Modellierung von Schwebstofftransporten in Nord- und Ostsee
- 37 (2004) Schmelzer, N., Strübing, K., Stanisławczyk, I., Sztobryn, M. Die Eiswinter 1999/2000 bis 2003/2004 an der deutschen Nord- und Ostseeküste/Ice Conditions in the Szczecin Lagoon and Pomeranian Bay During the Winters 1999–2002
- 38 (2005) Loewe, P., Schmolke, S., Becker, G., Brockmann, U., Dick, S., Engelke, C., Frohse, A., Horn, W., Klein, H., Müller-Navarra, S., Nies, H., Schmelzer, N., Schrader, D., Schulz, A., Theobald, N., Weigelt, S. Nordseezustand 2003
- 39 (2005) Sztobryn, M., Stigge, H.-J., Wielbińska, D., Stanisławczyk, I., Kańska, A., Krzysztofik, K., Kowalska, B., Letkiewicz, B., Mykita, M., Weidig, B. Sturmfluten in der südlichen Ostsee (westlicher und mittlerer Teil)/ Storm Surges in the Southern Baltic Sea (Western and Central Parts)
- 40 (2006) Loewe, P., Schmolke, S., Becker, G., Brockmann, U., Dick, S., Frohse, A., Herrmann, J., Klein, B., Klein, H., Nies, H., Schrader, D., Schulz, A., Theobald, N., Weigelt, S. Nordseezustand 2004

- 41 (2007) Bork, I., Dick, S., Kleine, E., Müller-Navarra, S. Tsunami – a study regarding the North Sea coast
- 42 (2007) Schrum, C., Schmelzer, N. (Eds.) Fifth Workshop on Baltic Sea Ice Climate Hamburg, Germany, 31 August–2 September 2005
- 43 (2008) Müller, L. Sauerstoffdynamik der Nordsee – Untersuchungen mit einem dreidimensionalen Ökosystemmodell
- 44 (2009) Loewe, P. (Ed.) System Nordsee – Zustand 2005 im Kontext langzeitlicher Entwicklungen
- 45 (2009) Sztobryn, M., Weidig, B., Stanisławczyk, I., Holfort, J., Kowalska, B., Mykita, M., Kańska, A., Krzysztofik, K., Perlet, I. Niedrigwasser in der südlichen Ostsee (westlicher und mittlerer Teil)/ Negative Surges in the Southern Baltic Sea (Western and Central Parts)
- 46 (2009) Schmelzer, N., Holfort, J. Eiswinter 2004/05 bis 2008/09 an den deutschen Nord- und Ostseeküsten Ice Winters 2004/05 to 2008/09 on the German North and Baltic Sea Coasts
- 47 (2010) Müller-Navarra, S., Knüpper, K. Improvement of water level forecasts for tidal harbours by means of model output statistics (MOS) – Part I (Skew surge forecast)
- 48 (2012) BSH [Hrsg.] Öl im Meer, Risiken, Vorsorge und Bekämpfung, Tagungsband, Symposium vom 17. bis 19. November 2010 Hamburg
- 49 (2013) Loewe, P., Klein, H., Weigelt-Krenz, S. (Eds.) System Nordsee – 2006 & 2007: Zustand und Entwicklungen
- 50 (2013) Müller-Navarra, S. H. Gezeitenvorausberechnungen mit der Harmonischen Darstellung der Ungleichheiten/On Tidal Predictions by Means of Harmonic Representation of Inequalities